23/11/2017

Μάθημα 7ο

Τεχνική Παρεκβολής (Extrapolation)

Έστω $Ax = b$, $A = M - N$, $\det(M) \neq 0$, $T = M^{-1}N$

Θεωρούμε τον διαχωρισμό $A = M_w - N_w$,

$$M_w = \frac{1}{w} M \quad , \; w \neq 0$$

$$N_w = M_w - A = \frac{1}{w} M - M + N = \frac{1}{w}\left[(1-w)M + wN\right]$$

Ορίζεται η επαναληπτική μέθοδος:

$$M_w x^{(k+1)} = \frac{1}{w}\left[(1-w)M + wN\right] x^{(k)} + b \iff$$

$$\iff M x^{(k+1)} = \left[(1-w)M + wN\right] x^{(k)} + wb$$

$$k = 0,1,2,\ldots, x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

$$T_w = M^{-1}\left[(1-w)M + wN\right] = (1-w)I + wM^{-1}N =$$
$$= (1-w)I + wT$$

$$x^{(k+1)} = T_w x^{(k)} + c_w$$
$$k = 0,1,2,\ldots, x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$
$$T_w = (1-w)I + wT \quad , \quad c_w = wM^{-1}b$$

Έστω λ ιδιοτιμή του T με ιδιοδιάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

$Tx = \lambda x$

$$T_w x = \left[(1-w)I + wT\right] x = \left[(1-w) + w\lambda\right] x \Rightarrow$$

$\mu = 1 - w + w\lambda$ ιδιοτιμή του T_w με ιδιοδιάνυσμα το x.

Πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\min_{w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \max_{1 \leq i \leq n} |1 - w + w\lambda_i| \quad , \lambda_i, \ i = 1(1)n \ \text{ιδιοτιμές του } T$$

(Δεν είναι εύκολο πρόβλημα)

$=$

Αν κάνω παρεκβολή στην παρεκβολή θα έχω ουσιαστικά παρεκβολή της αρχικής

$T_w = (1-w)I + wT$ αρχικός επαναλ. πίνακας

$$T_{w'} = (1-w')I + w'T_w = (1-w')I + w'[(1-w)I + wT] =$$
$$= (1 - \cancel{w'} + \cancel{w'} - w'w)I + w'wT =$$
$$= (1 - \underbrace{w'w})I + \underbrace{w'w}T$$

$$\mu = 1 - w + w\lambda \Leftrightarrow \lambda = 1 - \frac{1}{w} + \frac{1}{w}\mu = 1 - w' + w'\mu$$

Εφαρμογή

Έστω η αρχική μέθοδος $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$, $k = 0,1,2,\ldots$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

με ιδιοτιμές του T πραγματικές:

$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \leq \lambda_n$

Για να συγκλίνει η αρχική πρέπει:

$|\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow -1 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq 1.$

Ιδιοτιμές της παρεκβαλλόμενης μεθόδου:

$1 - w + w\lambda_i = 1 - w(1 - \lambda_i)$

Αν $w > 0$ τότε:

$1 - w(1-\lambda_1) \leq 1 - w(1-\lambda_2) \leq \ldots \leq 1 - w(1-\lambda_n)$

Για να συγκλίνει η παρεκβαλλόμενη μέθοδος πρέπει:

$$|1-w(1-\lambda_i)|<1, \quad i=1(1)n \iff$$

$$-1 < 1-w(1-\lambda_i) \le \dots \le 1-w(1-\lambda_n) < 1 \iff$$

- $1-w(1-\lambda_n) < 1 \iff w(1-\lambda_n) > 0 \iff$

$$(1-\lambda_n) > 0 \iff 1-\lambda_n > 0 \iff \lambda_n < 1 \iff$$

$$\underbrace{\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n < 1}$$

Για οποιοδήποτε $w>0$ θα πρέπει

- $-1 < 1-w(1-\lambda_1) \iff w < \dfrac{2}{1-\lambda_1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow w \in \left(0, \frac{2}{1-\lambda_1}\right) = \Pi$$ περιοχή σύγκλισης.

$$\min_{w\in\Pi} \max_{1\le i\le n} |\lambda - w(1-\lambda_i)| =$$

$$= \min_{w\in\Pi} \max \{ |1-w(1-\lambda_i)|, |1-w(1-\lambda_n)| \}$$

$$\operatorname{sign}\left(|1-w(1-\lambda_1)| - |1-w(1-\lambda_n)| \right) =$$

$$= \operatorname{sign}\left((1-w(1-\lambda_1))^2 - (1-w(1-\lambda_n))^2 \right) =$$

$$= \operatorname{sign}\left((2-w(2-(\lambda_1+\lambda_n)))\, w(\lambda_1-\lambda_n) \right) =$$

$$= \operatorname{sign}\left(w(2-(\lambda_1+\lambda_2)) - 2 \right)$$

Αλλάζει πρόσημο στο $\dfrac{2}{2-(\lambda_1+\lambda_n)}$

$$\left(\text{όπου } \operatorname{sign} = \begin{cases} 1, & \text{αν } x>0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \\ -1, & \text{αν } x<0 \end{cases} \right)$$

$$\rho(T_w) = \begin{cases} \downarrow\ 1 - w(1-\lambda_n), & w \in \left(0, \dfrac{2}{2-(\lambda_1+\lambda_n)}\right] \\ \uparrow\ w(1-\lambda_1) - 1, & w \in \left[\dfrac{2}{2-(\lambda_1+\lambda_n)}, \dfrac{2}{1-\lambda_1}\right) \end{cases}$$

<u>Βέλτιστο w</u>: $w_\beta = \dfrac{2}{2-(\lambda_1+\lambda_n)}$

$$\rho(T_{w_\beta}) = 1 - \frac{2(1-\lambda_n)}{2-(\lambda_1+\lambda_n)} =$$

$$= \frac{2-(\lambda_1+\lambda_n) - 2 + 2\lambda_n}{2-(\lambda_1+\lambda_n)} = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{2-(\lambda_1+\lambda_n)}$$

<u>$w<0$</u>, $1 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n$

<u>περιοχή σύγκλισης</u>: $\left(\dfrac{2}{1-\lambda_n}, 0\right)$

<u>Βέλτιστο w</u>: $w_\beta = \dfrac{2}{2-(\lambda_1+\lambda_n)}$,

$$\rho(T_{w_\beta}) = \frac{\lambda_n-\lambda_1}{(\lambda_1+\lambda_n)-2}$$

Άσκηση

$$Ax = b \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$T_j = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{bmatrix}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}} =$$

τα αντίθετα στοιχεία του A
(πλην της διαγωνίου)

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(T_j - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 - \lambda + \frac{1}{2}\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 1/2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \lambda_3 = -i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rho(T_j) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow \text{συγκλίνει}$$

$$-\log \rho(T_j) = -\log\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$T_{GS} = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -1 & 2 & \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{άνω τριγωνικό μέρος του A με αντίθετα πρόσημα.}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[(D-L)^{-1}\right]^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

<u>Άρα</u>: $$T_{GS} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(T_{GS} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1/2-\lambda & 1 \\ 0 & -1/2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1/2-\lambda & 1 \\ -1/2 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda\left((\lambda - 1/2)(\lambda+1) + 1/2 \right) =$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 + \lambda - \tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{1}{2} + 1/2\right) = -\lambda^2(\lambda + 1/2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -1/2 \end{cases}$$

$\rho(T_{GS}) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ συγκλίνει με διπλάσια

ταχύτητα από τον Jacobi

$$-\log\rho(T_{GS}) = -\log\frac{1}{2} = -\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -2\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

- $\lambda_1 = -1/2 < \lambda_2 = \lambda_3 = 0 < 1.$

περιοχή σύγκλισης : $w \in \left(0, \frac{2}{1-\lambda_1}\right) =$

$$= \left(0, \frac{2}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right) = \left(0, \frac{4}{3}\right)$$

$$W_B = \frac{2}{2-(\lambda_1+\lambda_3)} = \frac{2}{2-\left(-\frac{1}{2}+0\right)} = \frac{4}{5}$$

$$\rho(T_{W_B}) = \frac{\lambda_3-\lambda_1}{2-(\lambda_1+\lambda_3)} = \frac{0-(-1/2)}{2-\left(-\frac{1}{2}+0\right)} =$$

$$= \frac{1/2}{5/2} = \frac{1}{5}$$

$\mu_1 = 1-w+w\left(-\frac{1}{2}\right) = 1-\frac{3}{2}w$, $\mu_2 = \mu_3 = (1-w)$

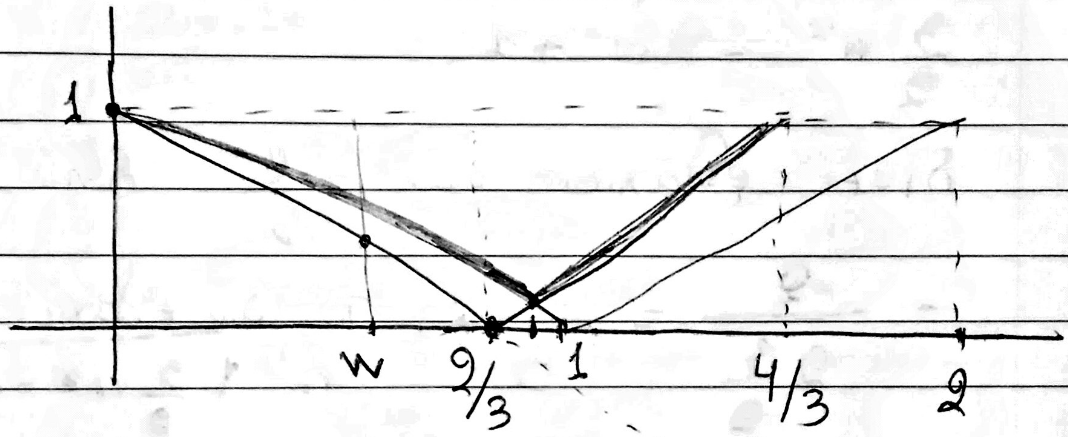
• $\left|1-\frac{3}{2}w\right|<1 \iff -1<1-\frac{3}{2}w<1 \iff$

$\iff w>0,\ w<4/3 \Rightarrow w\in(0,4/3)$

• $|1-w|<1 \iff -1<1-w<1 \iff$

$\iff w>0,\ w<2 \iff w\in(0,2)$

Άρα: $w\in(0,4/3)\cap(0,2)=(0,4/3)$



$1-w=\frac{3}{2}w-1 \iff \frac{5}{2}w=2 \iff w=\frac{4}{5}$

$\lambda_1=0,\ \lambda_2=i\frac{\sqrt{2}}{2},\ \lambda_3=-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\mu_1=1-w,\ \mu_2=1-w+wi\frac{\sqrt{2}}{2},\ \mu_3=1-w-wi\frac{\sqrt{2}}{2}$

$|\mu_1|=|1-w|<1 \iff -1<1-w<1 \iff$

$\iff w\in(0,2)$

$|\mu_2|=|\mu_3|=\sqrt{(1-w)^2+\left(w\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=$

$$= \sqrt{1 - 2w + w^2 + \frac{1}{2}w^2} = \sqrt{1 - 2w + \frac{3}{2}w^2} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 2w + \frac{3}{2}w^2 < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -2w\left(1 - \frac{3}{4}w\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}w - 1\right) w < 0 \Leftrightarrow w \in \left(0, \frac{4}{3}\right)$$

Το τριώνυμο:

$\frac{3}{2}w^2 - 2w + 1$

δίνει ελάχιστο στο $-\frac{b}{2a}$ δηλ δ :

$-\frac{-2}{2\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$, το ίδιο ελάχιστο δίνει και η $\sqrt{\frac{3}{2}w^2 - 2w + 1}$

$$\mu_2(2/3) = \sqrt{1 - 2\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\mu_1\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$w_B = \frac{2}{3}$, $\rho(Tw_B) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (Γιατί είναι το ελάχιστο της παραβολής)